

A.A. 2022/2023
Matematica - Scienze Geologiche
13 Aprile 2023

Esercizio 1.

a) Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{|3x - 4| - 2}{2x + 1} \geq 0.$$

b) Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{|3e^x - 4| - 2}{2e^x + 1} \geq 0.$$

Esercizio 2. Studiare la funzione $f(x) := \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^2 + 3}$ e disegnarne approssimativamente il grafico.

Esercizio 3. Calcolare (se esiste) il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+2x} - e^x)}{\sin^2 x - x^2}.$$

Esercizio 4.

a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

b) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos x + 5) \sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} dx.$$

Esercizio 5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$4y'' - 4y' + y = x.$$

Esercizio 6. Si consideri il numero complesso

$$w := \frac{8 + i}{2 - 3i}.$$

1. Scrivere la forma algebrica di w .

2. Calcolare $(w - 1)^6$.

Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari per $x \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n),$$

$$\text{dove} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

Alcuni limiti notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$